

点集拓扑的起源

把距离慢慢放下，从度量空间走向拓扑空间

zhaoch

2026-10-10

学拓扑时，我很容易在一个地方卡住。

前面还好好的：两点之间有距离，距离小就是靠得近，越来越远就可以谈收敛。这些事情多少都有一点生活经验撑着。

翻过几页，书上忽然说：给定一个集合，再指定一族子集，满足三条公理，就叫拓扑空间。

读到这里，我会忍不住往回翻。距离呢？图形呢？怎么只剩一堆集合了？这三条规矩又是从哪里冒出来的？

后来整理笔记，我觉得可以把中间被省略的那段路补回来。我们先拿着一把尺子，在熟悉的实数轴上走一走，看看它究竟帮我们做了哪些事。等这些事情看清楚，拓扑空间的定义就会有来处了。

这里说的“起源”，主要是一条理解概念的路线。真实的历史还汇集了点集、函数与极限等多条线索，我们在文末再回头看一眼。

尺子还在的时候

先看实数轴。

两个实数 x, y 之间的距离，我们再熟悉不过：

$$d(x, y) = |x - y|.$$

2 和 3 相距 1，2 和 2.001 相距 0.001。有了距离，“靠近”就有了可以计算的意思。

比如这个数列：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

我们说它收敛到 0。把这句话拆开，就是：无论你在 0 周围圈出多小的一段范围，只要半径仍然大于零，数列走到足够后面，就会全部待在里面。

你圈 $(-0.1, 0.1)$ ，从第 11 项起都在里面。你圈 $(-0.001, 0.001)$ ，从第 1001 项起也都在里面。范围可以继续缩小，要等到第几项可以随之往后推。

这一小圈范围有个正式名字，叫**开球**：

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad r > 0. \quad (1)$$

在实数轴上，它就是开区间 $(x - r, x + r)$ 。到了平面里，配上通常的欧氏距离，它是圆盘内部；到了三维空间，它才长得像我们日常说的球。数学里沿用“球”这个名字，是为了用同一句话处理这些情形。

度量空间 (metric space) 做的，就是把这把尺子推广到更一般的集合上。距离要非负，不同点之间的距离要大于零，要对称，还要满足三角不等式：绕道走，不能比直接走更短。¹

至于集合里的“点”到底是一个数、一个向量，还是一整个函数，可以先不限制。只要这把尺子符合规则，我们就能画开球，继续讨论靠近与收敛。

开集：给每个点留一点余地

现在看区间 $(0, 1)$ 。

假如你站在 0.5，左右都有不少空间可以活动。站到 0.99，右边的余地已经很小，但仍然可以圈出一个足够小的开区间，把自己包在里面，而且整个区间都留在 $(0, 1)$ 中。

只要你选的点还属于 $(0, 1)$ ，这件事总能办到。每个点能用的半径可以不同；越靠近端点，半径往往就要越小。

这就是度量空间里“开集”的定义：对于集合 U 中的每一个点 x ，都能找到某个 $r > 0$ ，使得

$$B_r(x) \subseteq U. \quad (2)$$

我们可以先把它读成一句话：**站在集合里的任何一个点，都能给它圈出一小块完全属于这个集合的范围。**

再试试 $[0, 1]$ 。在实数轴上，点 0 就会出问题。不管半径多小，以 0 为中心的开球都会包含负数，跑到 $[0, 1]$ 外面去。所以 $[0, 1]$ 不是实数轴上的开集。

到这里，“开”似乎很像“没有带上端点”。不过，这个印象马上就要接受一次小小的挑战。

把我们的整个空间换成自然数集 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ，距离仍然用 $|m - n|$ 。

现在站在 3，圈一个半径为 0.4 的开球。按照式 1 的定义，我们只从当前空间里挑点。2.8、3.1 都不在 $\mathbb{N}$ 里，当然不能挑进来。结果是：

$$B_{0.4}(3) = \{3\} \quad (\text{在自然数空间中}).$$

于是，单点集 $\{3\}$ 在自然数空间里就是开集。它唯一的那个点，已经有一个完全待在集合里的开球了。

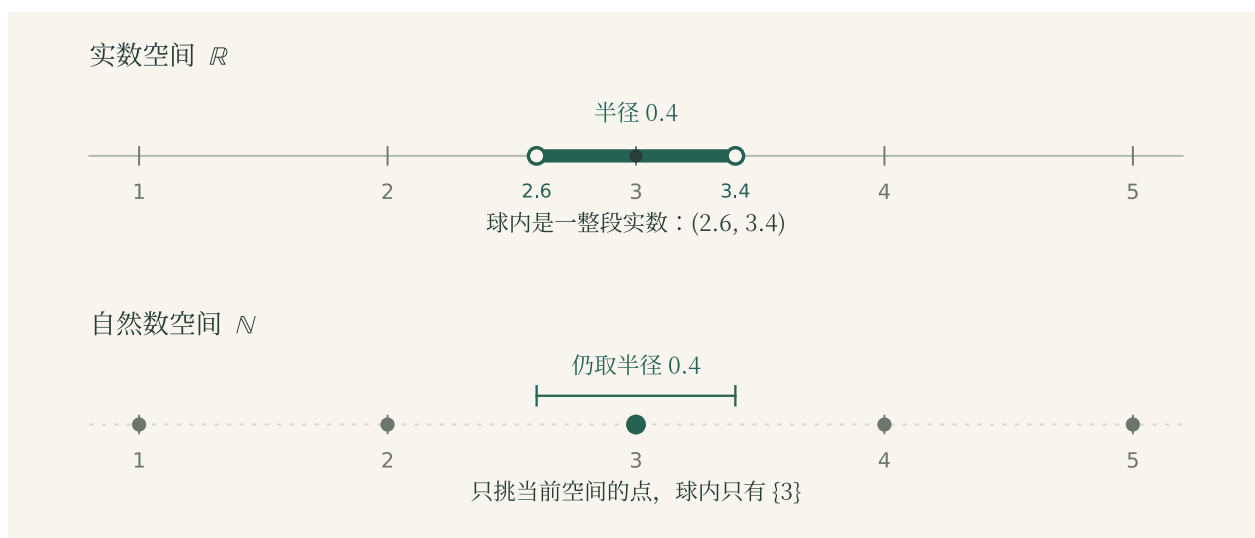


图 1 同样以 3 为中心、取 0.4 的半径：在实数空间中，开球包含区间 $(2.6, 3.4)$ 的所有实数；在自然数空间中，开球只有自然数 3。

¹完整地写，度量 $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ 满足 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 、 $d(x, y) = d(y, x)$ 、 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 。本文所有半径都取正数。开集与连续性的标准度量空间定义，也可对照 MIT《Analysis II》第一讲。

这个例子值得停一停。在实数轴上， $\{3\}$ 不是开集；在自然数空间里，它却是。所谓“周围留有余地”，也不要求球里一定有别的点。

判断一个集合是不是开集，要连同它所在的空间一起看。以后遇到“相对开”“子空间”这些词，可以先想起这幅图：整个世界变了，开球能挑到的点也跟着变了。

换一把尺子，有些事情照常发生

开集目前还是从距离算出来的。那它究竟依赖多少距离信息？

做一个很简单的实验。在同一条实数轴上，把距离改成

$$d_1(x, y) = |x - y|, \quad d_2(x, y) = 100|x - y|.$$

每一段距离的读数都变了。原来相距 1 的两点，现在相距 100。

但用第二把尺子画一个半径为 r 的球，正好等于用第一把尺子画一个半径为 $r/100$ 的球。半径换个数值，圈出的范围完全一样。因此，这两把尺子得到的开集也完全一样。

刚才的 $1/n$ 仍然收敛到 0。一个函数会不会连续，也不该因为尺子的读数乘了 100 就改变。

这时，一个念头开始变得具体：距离告诉了我们很多事，其中有些事只取决于它产生的开集。把同一份开集结构留下来，也许就已经足够继续研究这些问题了。

当然，只把尺子放大 100 倍，还算不上多大的惊喜。我们还要看看，那些熟悉的概念能不能真的接过来。

收敛和连续，开始用开集说话

先回到 $1/n \rightarrow 0$ 。

之前我们围着 0 画开球。现在改成选一个包含 0 的开集 U 。由于 U 是开集，它一定容得下一个以 0 为中心的小开球。数列最终会待在那个小球里，自然也就最终待在 U 里。

反过来，开球本身也是开集。因此，只要数列最终待在每一个包含 0 的开集中，它当然也会最终待在每一个以 0 为中心的开球里。

这样，我们就把收敛完整地换了一种说法：

x_n 收敛到 x ，就是对每一个包含 x 的开集，从某一项起，后面的所有项都属于这个开集。

这句话里，距离函数已经不见了。在度量空间中，它与原来的距离定义等价；到了更一般的拓扑空间，我们仍然可以沿用这句话定义序列收敛。²

再看连续。

学微积分时，我们用 ε 和 δ 表达：给定任意小的输出误差范围，总能找到一个足够小的输入误差范围，使输出满足要求。

用开集来讲，就是先在输出空间里，给 $f(x)$ 指定一个开集作为允许活动的范围；如果函数在 x 连续，就能在输入空间里，找到一个包含 x 的开集，让其中所有点的输出都落在那个允许范围内。

把所有点的要求合在一起，就得到拓扑学里非常重要的一句话：

²在一般拓扑空间中，序列仍然可以收敛，但只靠序列的收敛情况，未必足以判断哪些集合是开集，或一个映射是否连续。本文只把收敛的定义接过来，不把度量空间中所有关于序列的结论一并推广。

$$f: X \rightarrow Y \text{ 连续}$$

$$\Downarrow$$

(3)

每个开集的原像仍是开集。

“原像”初看有点绕。它只是问：输入里的哪些点，会被 f 送进指定的输出范围？把这些点收集起来，就是 $f^{-1}(V)$ ，这里不要求 f 有反函数。

例如 $f(x) = x^2$ 。输出范围取 $V = (1, 4)$ ，能被送进去的输入恰好是

$$f^{-1}((1, 4)) = (-2, -1) \cup (1, 2),$$

它确实是开集。这一次检查只是一个例子；要证明连续，必须对每一个开集都成立。

展开看：连续为什么对应“开集的原像是开集”？

在度量空间中，假设 f 处处连续。取输出空间的开集 V ，再取任意 $x \in f^{-1}(V)$ 。因为 V 开， $f(x)$ 周围有个小球完全待在 V 里；因为 f 在 x 连续， x 周围也有个小球，所有点的输出都进入前一个球。因此，后一个小球完全包含在 $f^{-1}(V)$ 中。这对原像里的每个点都成立，所以原像开。

反过来，假设每个开集的原像都开。给定 x 和输出半径 $\varepsilon > 0$ ，把输出开集选为 $B_\varepsilon(f(x))$ 。它的原像开，并且包含 x ，所以包含某个输入开球 $B_\delta(x)$ 。这正好给出 ε - δ 连续性所需的 δ 。

到这里，我们已经看见两件很实在的事情：收敛可以用开集表达，连续也可以用开集表达。那一族开集，确实接住了距离原来承担的一部分工作。

三条公理，是怎样长出来的

既然准备留下开集，就得弄清楚：度量产生的开集，总有哪些共同规律？

先看最简单的两个集合。整个空间 X 是开的，因为任何开球都在这个空间里。空集 $\emptyset$ 也是开的：它没有任何点需要检查，自然不会出现一个不满足条件的点。

接下来，把一批开集并起来。

一个点只要属于这个并集，就至少属于其中某一个开集。那个开集已经给它准备好了一个小球，小球当然也待在更大的并集里。

所以，任意多个开集的并，仍然是开集。这里用不上“总共有多少个集合”，有限、可数无限，甚至不可数，都可以。

再把两个开集交起来。

假如 x 同时属于 U 和 V ， U 给它一个半径 $r_U > 0$ ， V 给它一个半径 $r_V > 0$ 。我们取较小的那个：

$$r = \min\{r_U, r_V\} > 0.$$

用这个半径画出的球，就同时待在 U 和 V 中，也就待在交集里。三个、四个，乃至任意有限多个开集，都能这样取最小半径。

所以，有限多个开集的交，仍然是开集。

这里为什么忽然要强调“有限”？我们试着把范围一层层缩下去：

$$(-1, 1), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \dots$$

每次只取有限层的交，总还剩一个有正半径的开区间。可如果要求同时属于所有这些区间，任何非零实数迟早都会被排除，最后只剩

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}. \quad (4)$$

$\{0\}$ 在实数轴上不是开集。那些正半径可以无限趋近于零，给交集留下的余地就消失了。

“有限交”这三个字，到这里就有了分量。三条公理中的这个限制，是我们亲手试出来的。

现在，可以把距离放下了

我们终于走到了书上那个定义的门口。

给定一个集合 X ，选出它的一族子集 τ 。这个 τ 是一份“哪些子集算开集”的名单。只要名单满足：

1. $\emptyset$ 和 X 都在 τ 中；
2. τ 中任意一族集合的并，仍在 τ 中；
3. τ 中有限多个集合的交，仍在 τ 中，

就称 τ 是 X 上的一个**拓扑** (topology)，称 (X, τ) 是一个**拓扑空间** (topological space)。名单中的成员，叫作这个空间的开集。

这个定义省掉了一项要求：我们不必先提供一个距离，再由距离生成开集。可以直接提供开集名单，只要遵守这三条规则。

因此，原来的度量空间有一个自然的位置。每个距离 d 都能生成一族开集 τ_d ，也就得到一个拓扑空间：

$$(X, d) \mapsto (X, \tau_d). \quad (5)$$

这就是笔记里“度量空间是拓扑空间的特例”那句话的具体意思：**每个度量空间都自然给出一个拓扑空间；拓扑空间则允许更多的开集结构。**

而且，更多确实是更多。

取只有两个点的集合 $X = \{a, b\}$ ，规定它的开集只有空集和全集：

$$\tau = \{\emptyset, X\}.$$

你可以逐条检查，它满足三条公理，所以是一个合法的拓扑空间。这个拓扑叫平凡拓扑 (indiscrete topology)。

可是，没有任何距离能在这两个点上生成这份名单。因为如果真的有距离， $d(a, b)$ 必须是某个正数 s 。以 a 为中心、半径取 $s/2$ ，开球就只剩 $\{a\}$ ；它一定是度量生成的开集，却没有出现在我们的名单里。矛盾了。

这扇门确实打开了。拓扑空间中，有些还能找到一把与其开集结构相配的尺子，有些则找不到。开集公理已经允许我们一起研究它们。这一层的理论，就是**点集拓扑** (point-set topology)，也叫一般拓扑 (general topology)。

尺子放下以后，也要知道少了什么

走到这里，很容易生出一种兴奋：原来不用距离，也能谈这么多事情。

但抽象有代价。只保留开集，我们就无法再从中读出两点相距几米，也无法据此比较两条曲线的长度。我们保留了连续、收敛这些概念需要的结构，舍去了更多数值信息。

前些天讨论的柯西序列，恰好提醒了我这一点。

“收敛到 x ”可以围着一个已经指定的点 x ，检查所有开邻域。“柯西”则要比数列后面的项彼此有多近，要求它们最终一起满足任意给定的距离精度。单凭一般拓扑的开集名单，这种统一的精度比较并没有被提供。通常我们在度量空间中谈柯西序列；要进一步推广，就需要一致结构等额外信息。甚至在同一个集合上，两把尺子可以给出完全一样的开集，却对“是否完备”给出不同答案。

一个可以慢慢看的例子：同样的开集，不同的完备性

在 $\mathbb{R}$ 上，考虑通常距离 $d(x, y) = |x - y|$ ，以及另一个距离

$$\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|.$$

函数 $\arctan$ 把整个实数轴连续、可逆地对应到开区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ ；其反函数 $\tan$ 也连续。因此， d 与 ρ 生成的开集相同。

但数列 $x_n = n$ 在 ρ 下是柯西序列，因为 $\arctan n$ 越来越靠近 $\pi/2$ 。它却不能在 $\mathbb{R}$ 中按 ρ 收敛：没有任何有限实数 x 满足 $\arctan x = \pi/2$ 。

所以通常距离下的 $\mathbb{R}$ 完备，这个新距离下的 $\mathbb{R}$ 不完备。开集结构相同，并没有让两把尺子的柯西判断也相同。

这也让“抽象”变得更清楚了。我们需要一边看清留下来的东西，一边记住已经舍去的东西。以后研究紧致性、连通性，可以继续沿开集这条线走；研究完备性，就要把所用的距离或相应的额外结构说清楚。

再读一次那个定义

现在回头看开头那三条公理，我的感觉会不一样。

第一次看到时，它们像是突然摆在桌上的规定。再走一遍这条路，就能想起它们背后的画面：一个点周围的小球，并集里收留它的某个开集，有限交时还能取到的最小半径，以及无限缩小时最后消失的余地。

整理学习笔记时，我留下过这样一句话：

把度量空间中由距离诱导出来的开集结构抽象出来，以开集公理定义拓扑空间，从而不依赖具体距离来研究空间的拓扑性质。

这句话现在终于有了一点温度。它里面的每一步，我们都在实数轴上试过，也在自然数里检查过。

抽象后的定理能够回到具体例子中使用，道理也在这里：具体例子符合公理，也符合定理的其他前提，所以证明中每一步都适用于它。少了某个前提，就得重新检查，不能因为名字里都带着“空间”，便把结论直接搬过去。

我喜欢这样理解数学中的一次抽象：从熟悉的地方出发，带着一个问题往前走，渐渐发现有些原以为离不开的东西，原来可以先放下。

尺子放到一旁以后，那个空间依然有可以研究的结构。我们还知道怎样围住一个点，怎样表达趋近，怎样让一个映射保持连续。书页上那一族抽象的集合，也终于和眼前的实数轴接上了。

顺着这条线，回望一点历史

这篇文章重走的是一条概念路线。真实历史中，人们对点集、极限和函数的研究逐渐交织，形成了更一般的空间观念。

Fréchet 在 1906 年的论文 *Sur quelques points du calcul fonctionnel* 中，已经尝试把不同对象上的极限与连续性放进统一的抽象研究中。他在开篇讨论的困难很具体：对象可以是点，也可以是曲线等；如果每换一类对象就重新制定一套极限理论，很难看到共同的规律。[1]

Hausdorff 的 1914 年著作 *Grundzüge der Mengenlehre* 则是拓扑空间理论发展的重要里程碑。它采用邻域公理的表述；今天教材中常见的开集定义，是这段发展在现代语言中的呈现，不能直接当作当年原文的逐字复述。³

我们正在读的 Bredon *Topology and Geometry* (GTM 139)，第一章便是一般拓扑。[2] 读这些书时，我想把这条线索留在旁边：遇到一个抽象定义，先找找它在熟悉的例子中，究竟留下了什么。

参考与延伸阅读

[1] M. Fréchet, 《Sur quelques points du calcul fonctionnel》, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 卷 22, 页 1~72, 1906, doi: 10.1007/BF03018603.

[2] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, 卷 139. 收入 *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 139. Springer, 1993. doi: 10.1007/978-1-4757-6848-0.

修订记录

2026-10-10: 根据拓扑与公理化学习笔记写成首稿，补充自然数与实数的开球对照、开集公理的由来，以及柯西序列与完备性的边界。

最近修订：2026-10-10。原稿版本：23df54af76d5。

持续更新的文章页面

³原书年代与版本信息见波恩大学 Hausdorff 全集项目；关于原书邻域公理及其与现代定义的关系，见该项目的《Zum Begriff des topologischen Raumes》研究文章。